3-a) on a I_n est décroissante alors $I_{n+1} \le I_n \Leftrightarrow 2\sqrt{e} - 2(n+1)I_n \le I_n \Leftrightarrow 2\sqrt{e} \le (2n+3)I_n \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \le I_n$ d'autre part, on a : $I_n \le I_{n-1}$ et on a : $I_n = 2\sqrt{e} - 2nI_{n-1} \Leftrightarrow I_{n-1} = \frac{2\sqrt{e} - I_n}{2n}$ d'où : $I_n \le \frac{2\sqrt{e} - I_n}{2n} \Leftrightarrow$

$I_n + \frac{I_n}{2n} \le \frac{2\sqrt{e}}{2n} \Leftrightarrow I_n \le \frac{2\sqrt{e}}{2n\left(1+\frac{1}{2n}\right)}$ donc $I_n \le \frac{2\sqrt{e}}{2n+1}$ finalement : $\frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \le I_n \le \frac{2\sqrt{e}}{2n+1}$.

b) $\frac{2\sqrt{e}}{2n+3} \le I_n \le \frac{2\sqrt{e}}{2n+1} \Leftrightarrow \frac{n.2\sqrt{e}}{2n+3} \le n.I_n \le \frac{n.2\sqrt{e}}{2n+1}$ *comme* $\lim_{n\to+\infty} \frac{n.2\sqrt{e}}{2n+3} = \sqrt{e} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n.2\sqrt{e}}{2n+1}$ donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = \sqrt{e}$.

Exercice N°19 : I-1) $g'(x) = \frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{2+2x-2x-1-x}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{(1+x)^2}$

x	-1		1	
g'(x)	‖ +	+	0	−
g(x)	‖ 0 ↗	↗	1-ln2	↘

$\lim_{x\to(-1)^+} g(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = \lim_{y\to0^+}\left[\frac{2(y-1)}{y} - \ln(y)\right] = \lim_{y\to0^+}\left[2y - 2 - y\ln(y)\right] = -\infty$ car si on pose : $y = 1+x$, si $x \to (-1)^+ ; y \to 0^+$ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x) = 2 - \infty = -\infty$

2) d'après le tableau de variation, g s'annule deux fois et on a g(0)= 0-ln(1)=0 et g (3,8) = 0,01 et g(4)= -0,009 comme $g(3,8)\times g(4) < 0$ et g continue et strictement décroissante sur]3,8 ; 4[alors l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α tel que : 3,8 < α < 4.

3) $g(x) \le 0$ *sur* $]-1,0] / g(x) \ge 0$ *sur* $[0,\alpha] / g(x) \le 0$ *sur* $[\alpha,+\infty[$.

4) D'après le tableau de variation, g admet un maximum est égale à 1 – ln2 < 1 d'où g(x) ≤ 1.

II- 1) Les fonctions : $\left.\begin{matrix} x \mapsto x+1 \\ x \mapsto \ln(x+1) \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{matrix}\right\}$ sont continues sur]0,+∞[don f est continue sur]0,+∞[.

Continuité de f en 0^+ : $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0+} \frac{\sqrt{x}\ln(1+x)}{x}$. On pose : $y = 1+x,\ x \to 0, y \to 1$

et $\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to1} \frac{\ln(y)}{y-1} = 1$ d'où $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \sqrt{x} \times \lim_{x\to0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0\times1 = 0 = f(0)$ .Don nc f est continue à droite en 0.

2) **Dérivabilité en 0^+ :** $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} . \frac{\ln(1+x)}{x} = +\infty\times1 = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite de 0.

3) Les fonctions : $\left.\begin{matrix} x \mapsto \ln(1+x) \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{matrix}\right\}$ sont dérivables sur]0,+∞[d'où f est dérivable sur]0,+∞[. Et

$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}.\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(1+x)}{\sqrt{x}^2} = \frac{2x-(1+x).\ln(1+x)}{2\sqrt{x}(1+x)x} = \frac{2x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \left(\frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)\right).\frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

x	0		α		+∞
g(x)	‖ +	+	0	−	
f(x)	‖ 0 ↗	↗	f(α)	↘	

Qarray.tn - Aqua Blech - Qarray.tn
Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...